

# ВОЛНЫ НА ВОДЕ

## И «ЗАМОРСКИЕ ГОСТИ» Н. РЕРИХА

А. Л. Стасенко

«Глубока, по-весеннему студена подернутая рябью синь реки. Весело плывут по ней нарядные расписные ладьи с пестрыми парусами. Лихо поднялись их носовые части, завершающиеся головами драконов. Их яркая раскраска горит на солнце... Далекий и опасен путь варягов»<sup>\*</sup>).

Речь идет о картине прекрасного русского художника Николая Рериха «Заморские гости» (1901), которой можно полюбоваться в Третьяковской галерее. Она воспроизведена на обложке нашего журнала.

Используем это яркое поэтическое полотно для размышлений на некоторые физические темы: о законе сохранения энергии, теории размерностей физических величин и статистической обработки результатов эксперимента. А при чем тут картина? Просто, чтоб было веселее.

В самом деле, разве не интересно попытаться определить, глядя на эту картину, с какой скоростью плывут заморские гости? Пусть относительно текущей воды, а не относительно берегов. А что в картине может нам дать необходимую информацию? Прежде всего — носовая волна, образующаяся с обоих бортов у форштевня, завершающегося драконом. Далее, круговые волны, которые бегут по поверхности воды от корабля; качественно они похожи на окружности с общим центром, лежащим где-то в плоскости ватерлинии ладьи. Добавим к этому постановку реи и паруса относительно осевой плоскости корабля. Может быть, вы найдете и еще что-нибудь, дающее

сведения о направлении или модуле скорости корабля, ветра, реки. Мы же ограничимся здесь рассмотрением двух явлений, тесно связанных с волнами на воде. Итак,

### Носовая волна

Почему она образуется? Пусть вода симметрично набегаает на клин (нос корабля) с вертикальными гранями и углом при вершине  $2\alpha$  (рис. 1) со скоростью  $V$  (очевидно, это и есть скорость корабля относительно воды). У самого носика клина мы можем разложить вектор  $V$  на две компоненты: параллельную одной из граней (одному из бортов корабля)  $V_{\parallel}$  и перпендикулярную ей  $V_{\perp}$ . Таким образом, вода относительно рассматриваемого борта участвует в двух движениях: скользит вдоль борта со скоростью  $V_{\parallel} = V \cos \alpha$  и «налетает» на него перпендикулярно со скоростью  $V_{\perp} = V \sin \alpha$ .

Во втором движении она разделяется на слои: нижние слои «ныряют» под днище корабля (рис. 2), верхний же слой поднимается вертикально, и мы можем легко оценить, на какую высоту. Действительно, каждая частица воды из этого верхнего слоя, обладая энергией  $mV_{\perp}^2/2$ , резко изменив

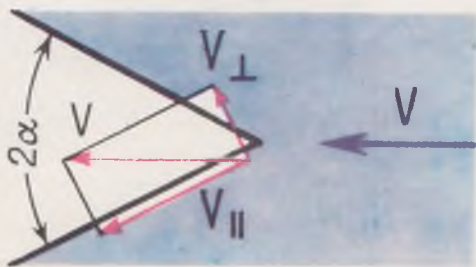


Рис. 1.

<sup>\*</sup>) В. П. Князев, «Н. Рерих», Издательство «Искусство», 1968.

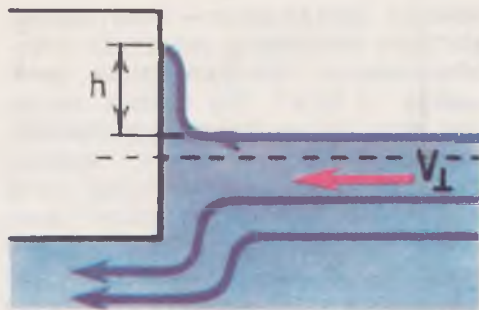


Рис. 2.

направление движения, может забраться вверх на такую высоту  $h$ , где ее потенциальная энергия  $mgh$  будет не больше кинетической энергии:

$$mgh \leq m \frac{V_1^2}{2}.$$

Отсюда

$$h \leq \frac{V_1^2}{2g}.$$

Таким образом, закон сохранения энергии и принцип суперпозиции движений позволяет нам сделать оценку для скорости корабля:

$$V_1^2 \geq 2gh,$$

следовательно,  $V^2 \geq \frac{2gh}{\sin^2 \alpha}$ . (1)

Нам нужно лишь измерить угол  $\alpha$  и высоту носовой волны  $h$ . Соответствующий расчет будет проведен ниже, а сейчас рассмотрим второй источник информации о движении корабля, которым мы располагаем.

### Поверхностные волны

Поверхностные волны — довольно сложный объект исследования, но мы можем многое узнать о них, исходя из очень простых соображений размерности тех физических величин, которые описывают это явление. Для этого нужно прежде всего ясно представить себе причины явления. Волна — это распространяющееся колебание. А почему поверхность воды, выведенная чем-то из положения равновесия, может колебаться? Всякое колебание является результатом «игры» двух факторов: силы, возвращаю-

щей в положение равновесия, и инерции, заставляющей проскакивать это положение равновесия.

Если на поверхности жидкости образуется «горб», то вернуть частицы жидкости в положение равновесия может, например, сила тяжести  $F_g$  (см. рис. 3а), пропорциональная ускорению земного тяготения  $g$ . Падая вниз, по инерции «горб» провалится ниже положения равновесия; по соседству с ним будет вытеснен другой «горб» и т. д., в результате чего побегит волна, характеризующаяся некоторой скоростью  $u$  и длиной  $\lambda$  (расстоянием между «горбами»). В рассматриваемом нами случае мерой инертности колеблющейся воды является ее плотность.

Итак, движение волны по поверхности жидкости описывается следующими величинами (будем сразу писать их размерности):

$$u \left[ \frac{м}{с} \right], \lambda \left[ м \right], g \left[ \frac{м}{с^2} \right], \rho \left[ \frac{кг}{м^3} \right].$$

Как их связать друг с другом? Например, как найти зависимость интересующей нас скорости волны  $u$  от других величин  $\lambda$ ,  $g$ ,  $\rho$ ? Здесь-то нам и придут на помощь уже выписанные размерности.

Мы видим, что размерность  $u$  содержит в знаменателе секунду. Из трех других величин размерность времени входит только в  $g$  (там в знаменателе стоит  $c^2$ ). Отсюда немедленно пишем  $u \sim \sqrt{g}$ , и, очевидно,  $g$  больше трогать нельзя: мы получили от него требуемую секунду в знаменателе размерности  $u$ . Но вместе с этим  $\sqrt{g}$  дал нам в числителе

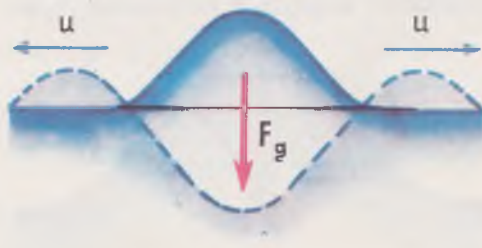


Рис. 3а

$\sqrt{m}$ , а нам нужен в числителе метр без всякого корня. Значит, мы можем  $\sqrt{g}$  домножить на  $\sqrt{\lambda}$ , и тогда все будет в порядке: величина  $\sqrt{g\lambda}$  имеет нужную нам размерность  $[м/с]$ .

Итак,

$$u \left[ \frac{м}{с} \right] \sim \sqrt{g \left[ \frac{м}{с^2} \right] \cdot \lambda [м]}.$$

Заметим, что мы получили только пропорциональность, а не равенство, так как перед  $\sqrt{g\lambda}$  может стоять любой множитель  $k$ , не имеющий размерности, то есть  $u = k \sqrt{g\lambda}$ . Может быть,  $k = 1/2$ , а может быть,  $k = 1\,000\,000$ . Здесь наша теория бессильна, но она нам позволила выяснить главное — физику явления. Точное решение задачи дает значение  $k = 1/\sqrt{2\pi}$ , то есть

$$u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (2)$$

А где же здесь  $\rho$   $[кг/м^3]$ ? Его нет, ибо нам просто некуда деть килограммы, входящие в размерность  $\rho$ , их не с чем сократить, чтобы в конечном результате величина  $u$  измерялась только в  $м/с$ . Это физически понятно: ведь и вес «горба», ускоряющий его вниз, и масса «горба», определяющая его инерционность, пропорциональны  $\rho$  — вот плотность и выпала из формулы (2). (Аналогичная ситуация имеет место в случае математического маятника, период которого  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$  по той же самой причине не зависит от массы, подвешенной на нити длиной  $l$ ).

Но если волны становятся очень мелкими, «рябью» (ниже мы оценим, что значит очень мелкими), то «горб» стремится вернуться в положение рав-



Рис. 3, б.

новесия другая сила — сила поверхностного натяжения, связанная с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$   $[н/м]$ . Это похоже на то, как если бы мы натянутую горизонтально резиновую пленку приподняли пальцем кверху: тогда из-за натяжения пленки на палец вниз стала бы действовать сила  $F_\sigma \sim \sigma$  (рис. 3б). В этом случае распространение волн будет зависеть от величин  $\sigma$   $[н/м]$ ,  $\lambda$   $[м]$ ,  $u_\sigma$   $[м/с]$ ,  $\rho$   $[кг/м^3]$ . (Мы обозначили скорость волн, связанных с поверхностным натяжением, через  $u_\sigma$ , чтобы отличить ее от  $u$  из формулы (2).)

Теперь у нас достаточно опыта, чтобы, пользуясь размерностями, получить выражение для скорости волн (вспомним, что  $1 н = 1 кг \cdot м/с^2$ ):

$$u_\sigma \left[ \frac{м}{с} \right] \sim \sqrt{\frac{\sigma [кг/с^2]}{\rho [кг/м^3] \cdot \lambda [м]}}.$$

Если мы хотим знак пропорциональности заменить на знак равенства, нужно учесть недостающий безразмерный множитель. Согласно точной теории он равен  $1/\sqrt{2\pi}$ . Итак,

$$u_\sigma = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}. \quad (3)$$

Разве не удивительно, что мы почти «бесплатно», не зная никаких теорий, получили основное: характер зависимости между величинами! Здесь уместно вспомнить, что по мнению знаменитого итальянского физика Энрико Ферми «в физике...нет места для путаных мыслей...действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности» \*).

Для «студеной» воды

$$\sigma \approx 80 \text{ дн/см} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ н/м},$$

$$\rho = 1г/см^3 = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

Учитывая это, мы построили график зависимости скорости поверхностных волн, определяемой выражениями (2) и (3), от величины  $\sqrt{\lambda}$  (рис. 4).

\*) Б. Понтекорво, «Энрико Ферми» М., «Знание», 1971, стр. 27.

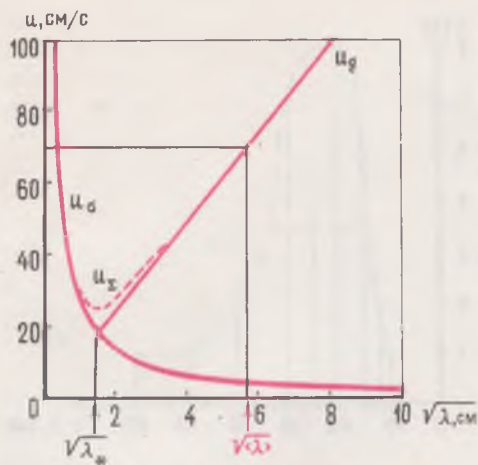


Рис. 4

Видно, что обе кривые пересекаются при  $\lambda = \lambda_* \approx 12$  см. Таким образом, при очень малых длинах волн ( $\lambda \ll \lambda_*$ ) их скорость определяется поверхностным натяжением, при больших ( $\lambda \gg \lambda_*$ ) — ускорением земного тяготения. В промежуточной области ( $\lambda \approx \lambda_*$ ) скорость поверхностных волн определяется обоими факторами (силой земного тяготения и поверхностным натяжением). Выражение для скорости волны становится сложнее ( $u_z = \sqrt{u^2 + u_0^2}$ ). Зависимость  $u_z$  от  $\sqrt{\lambda}$  показана на рисунке 4 пунктирной линией.

В физике часто бывает так, что гораздо проще исследовать некоторые предельные случаи (у нас это  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$ ), а «промежуточная область» требует больших усилий. К счастью, для нас эта область не существенна, потому что, взглянув на картину Рериха, мы можем сказать достоверно, что круговые волны имеют длину, явно большую  $\lambda_*$ , и, следовательно, их скорость описывается выражением (2). Чтобы найти ее, надо только «измерить»  $\lambda$ . Вычисления мы проведем ниже, а пока что сделаем еще один шаг.

Вспомним, что когда жук-водомер быстро бежит по воде или пуля летит в воздухе быстрее звука, всегда образуются характерные «усы», которые тем теснее прижимаются к движущемуся телу, чем больше его скорость  $V$  по сравнению со скоростью  $u$  распространения возмущений, вызываемых телом. На рисунке 5 приведены три характерных случая: если  $V < u$ , волны обгоняют тело и лишь теснее сжимаются в направлении движения; если  $V = u$ , то гребни волн в одной точке (в направлении движения) наползают друг на друга; если  $V > u$ , то тело обгоняет волны, и образуются «усы». (Фотография, приведенная на второй полосе обложки, иллюстрирует последний случай.)

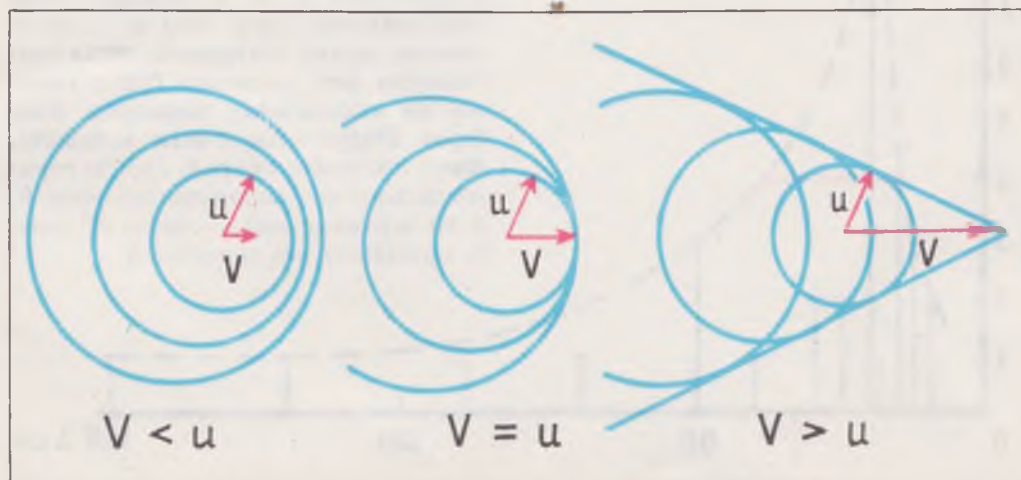


Рис. 5.

Взглянув на картину Рериха, мы видим, что на ней изображен первый случай; более того, поскольку незаметно даже намека на сжатие волн в направлении движения корабля, мы должны заключить, что его скорость намного меньше, чем скорость движения волн:

$$V \ll u. \quad (4)$$

Таким образом, с точки зрения поверхностных круговых волн корабль просто «топчется на месте».

А теперь приступим к вычислениям. Для этого нам нужно «измерить» высоту носовой волны  $h$ , угол  $2\alpha$  и длину поверхностной волны  $\lambda$ .

### Измерения

Мы могли бы постараться измерить нужные нам величины по картине поточнее, с учетом перспективы, проекций, ракурсов и т. д. Но, во-первых, это довольно сложно и утомительно; во-вторых, мы оказались бы при этом в смешном положении: действительно, нелепо подходить к сказочному вымыслу художника как к экспериментально полученной фотографии. К тому же мы не знаем, какой высоты был, например, нос

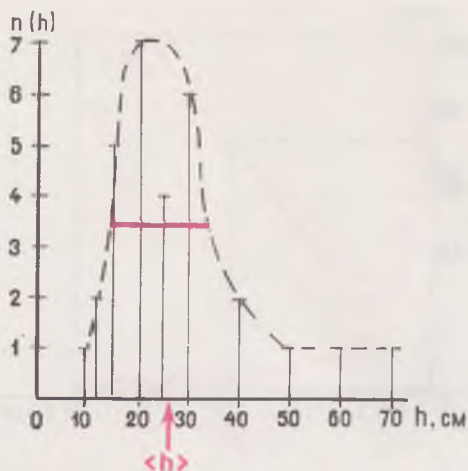


Рис. 7.

у изображенного корабля, какого размера нарисованные щиты. Есть, правда, на картине один характерный размер, который, по-видимому, мало изменился со времен варягов — это размер головы.

Прежде чем читать дальше, попробуйте сами, пользуясь хотя бы этим «эталоном», оценить  $h$  и  $\lambda$ . Это будет ваше личное «измерение». Нельзя, однако, забывать, что картина воспринимается каждым зрителем очень индивидуально. Покажите эту картину всем ребятам вашего класса и спросите каждого, что он думает о значениях  $h$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  (хорошо, если спрашиваемый при этом не слышал ответов других товарищей; тогда «показания» всех учеников будут похожи на независимые показания прибора). Полученные ответы запишите, затем постройте график, где по горизонтальной оси отложите значения  $h$ , а по вертикальной — число человек  $n$ , назвавших это значение  $h$ .

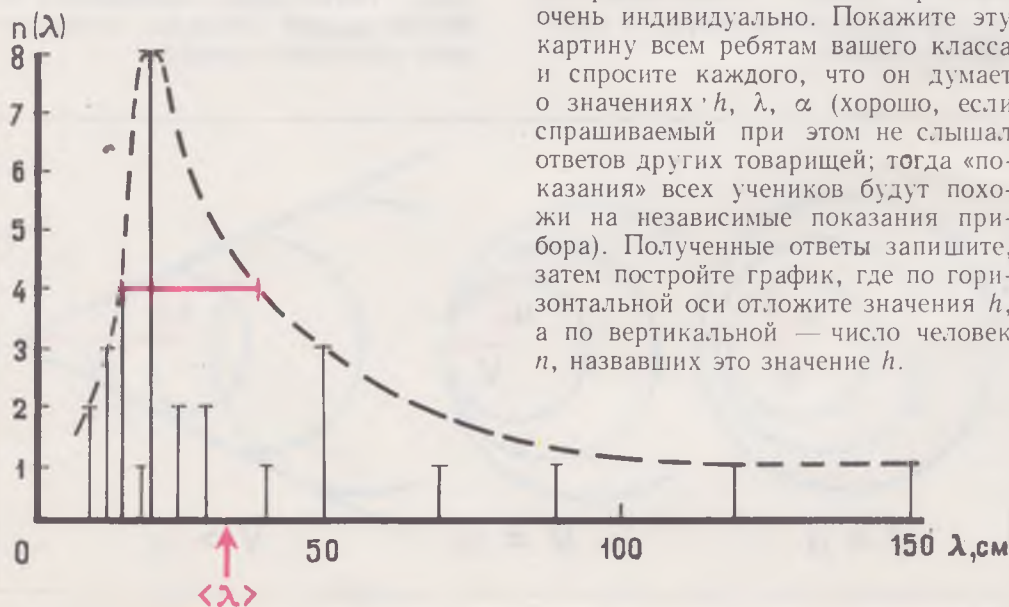


Рис. 6.

Автор проделал это со своими товарищами (всего было опрошено 30 человек) и получил графики, приведенные на рисунках 6 и 7. Интересно, что большинство опрошенных назвали значения  $h$  и  $\lambda$ , кратные 5 см, некоторые — кратные 2—2,5 см, но не менее (никто не назвал, например,  $h = 27, 1357891439$  см). Это похоже на то, как если бы измеряли расстояния линейкой с минимальной ценой деления 2—2,5 см.

При помощи этих графиков мы можем найти средние значения  $\langle h \rangle$  и  $\langle \lambda \rangle$  и считать их достаточно объективными.

Процедура определения средних обычна. Каждое значение  $h_i$  нужно умножить на число людей  $n_i$ , назвавших его, взять сумму по всем  $i$  и разделить на полное число опрошенных. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle h \rangle &= \frac{\sum_{i=1}^{30} h_i n_i}{\sum_{i=1}^{30} n_i} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} h_i n_i = \\ &= \frac{1}{30} (10 + 2 \cdot 12 + 5 \cdot 15 + 7 \cdot 20 + \\ &+ 4 \cdot 25 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 50 + 1 \cdot 60 + \\ &+ 1 \cdot 70) = \frac{789}{30} \approx 26 \text{ см} \approx 0,26 \text{ м}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle &= \frac{1}{30} (2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 15 + 1 \cdot 18 + \\ &+ 8 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 30 + \\ &+ 1 \cdot 40 + 3 \cdot 50 + 1 \cdot 70 + 1 \cdot 80 + \\ &+ 1 \cdot 90 + 1 \cdot 120 + 1 \cdot 150) = \\ &= 32,5 \text{ см} = 0,325 \text{ м}. \end{aligned} \quad (6)$$

Эти средние значения отмечены на рисунках 6 и 7 красными стрелками.

Точность наших «измерений»-опросов можно грубо оценить шириной плавной пунктирной кривой, взятой на половине ее высоты (красные линии на рисунках 6 и 7). Для физических экспериментов разработана, конечно, целая теория ошибок, в общем очень похожая на то, что мы

сделали, только в эксперименте «опрашиваются» приборы).

А как быть с углом  $\alpha$ ? Все опрошенные сошлись на том, что он лежит где-то в пределах  $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$  (корабль на картине довольно тупоносый). Таким образом,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ < \sin \alpha < \sin 90^\circ = 1. \quad (7)$$

Теперь у нас есть все, чтобы сделать оценки скорости корабля и поверхностных волн.

### Результаты

Подставляя значения  $h$ ,  $\lambda$  и  $\sin \alpha$  из (5), (6), (7) в формулы (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} v &\geq \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 [\text{м/с}^2] \cdot 0,26 [\text{м}]}{1 \div \sqrt{2}/2}} = \\ &= \sqrt{5,1 \div 7,25 [\text{м}^2/\text{с}^2]} = \\ &= 2,25 \div 2,7 [\text{м/с}], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{9,8 [\text{м/с}^2] \cdot 0,34 [\text{м}]}{2\pi}} \approx \\ &\approx 0,7 [\text{м/с}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь мы с удивлением замечаем, что соотношения (8) и (9) несовместимы с неравенством (4). Действительно, судя по высоте носовой волны, корабль плывет со скоростью  $V$  не меньшей, чем 2,25 м/с, а если ориентироваться на круговые поверхностные волны, которые на картине почти концентричны, скорость корабля должна быть намного меньше скорости этих волн  $u = 0,7$  м/с, которая и без того меньше  $V$ .

При известной внимательности вы найдете много подобных физических неточностей и в других произведениях искусства (по-видимому, это связано с тем, что у него свои задачи и законы). Тогда вы сможете не только полюбоваться ими и получить эстетическое удовольствие, но и поговорить с младшим братом о законах физики, используя очень привлекательные иллюстрации.

